20/05/19

Εσωτερικό γινόμενο Minkowski - Ειδική θεωρία σχετικότητας

Άλφα του Κενταύρου AC: Απόσταση από τη Γη 4 έτη φωτός (εώς 94×10^{12} km). Γεννιούνται 2 δίδυμα αδέλφια. Το πρώτο μένει στη γη κι το 2ο με κάποιο πύραυλο ταχύτητας 0,8 της ταχύτητας του φωτός πηγαίνει στον AC κι μόλις φτάσει επιστρέφει αμέσως. Μόλις επιστρέψει στη Γη παρατηρεί ότι ο αδελφός του είναι 10 ετών, ενώ εκείνος είναι 6 ετών.

Θα χρησιμοποιήσω το "ψευδο" εσωτερικό γινόμενο του Minkowski.

Χωροχρόνος: $\mathbb{R}^4$. Κάθε σημείο του $\mathbb{R}^4$ $(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{\text{χώρος}}, \underbrace{x_4}_{\text{χρόνος}})$ καλείται γεγονός. Το "εσωτερικό" γινόμενο το οποίο εξηγεί τα πειραματικά δεδομένα είναι:

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$$\|x\| = \sqrt{\left| -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \right|}$$

$$\|x-y\| = \sqrt{\left| -(x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2 - (x_3-y_3)^2 + (x_4-y_4)^2 \right|}$$

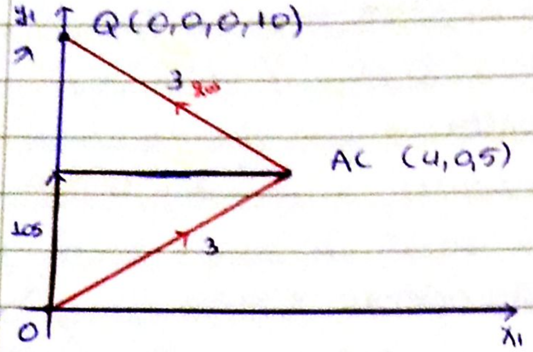
Χρόνος για να πάει κι να έρθει: $\dfrac{8 \text{ έτη φωτός}}{0{,}8} = 10$ έτη = "απόσταση" OQ

http://www.tanenghong.com

• Χρονοδιαγραμμα για τα διάδικα:

1) Ο AC βρίσκεται στον άξονα x_1

όταν επιστρέφει ο ατ(?)ός του



Απόσταση από το O στο AC:

$\|O-AC\| = \sqrt{|(4-0)^2-(0-0)^2+(5-0)^2|} =$

$= \sqrt{-16-0+25} = 3$

Η απόσταση $OAC + ACQ = 3+3=6$

$=6 < OQ = 10$

Άρα σε αυτή τη γεωμετρία η ευθεία δεν είναι τη συντομότερη απόσταση. Φυσική εξήγηση των αριθμών:

Η απόσταση μεταξύ 2 σημείων μιας τροχιάς ενός παρατηρητή όπως για το 2ο παιδί, αντιστοιχεί στο χρόνο που καταγράφεται για να μετακινηθεί από το πρώτο στο δεύτερο σημείο.

— o —

ΜΟΡΦΕΣ JORDAN

πχ: Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Να εξεταστεί αν διαγωνοποιείται ο A

Ο A είναι άνω τριγωνικός με $\lambda_1=\lambda_2=3$ κ' $\lambda_3=2$

$V(3)$: $(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow z=0,\ y=0,\ x \in \mathbb{R}$, άρα $V(3) = \langle (1,0,0) \rangle$

Ο A δεν διαγωνοποιείται. Το ίδιο ισχύει κ' για πολλούς άλλους πίνακες.

$A = P\Lambda P^{-1}$ με $\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n^k \end{pmatrix}$

o $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ είναι "σχεδόν" διαγωνοποιημένος

$$(A')^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 6 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A')^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 3 \cdot 3^2 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Ένας πίνακας $m \times m$ μορφής

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

καλείται στοιχειώδης πίνακας Jordan

~~[illegible]~~

πχ: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

• **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Δυνάμεις ενός στοιχειώδους πίνακα Jordan:

$$\left(J_m(\lambda)\right)^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \overset{\text{επαγωγή}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{m+1}\lambda^{n-(m+1)} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{m+2}\lambda^{n-(m+2)} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^n \end{pmatrix}$$

• **ΘΕΩΡΗΜΑ JORDAN** (Κανονική Μορφή Jordan)

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας B ώστε :

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} J_{(n_{1,1})}(\lambda_1) & & & & & & & 0 \\ & J_{(n_{2,1})}(\lambda_1) & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & J_{(n_{k,1})}(\lambda_k) & & & & \\ & & & & J_{(n_{2,2})}(\lambda_2) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & J_{(n_{k,2})}(\lambda_2) & \\ & 0 & & & & & & J_{(n_{1,m})}(\lambda_m) \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & J_{(n_{k,m})}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

Με $(n_i;i)$ συμβολίζω κάποιον ακέραιο, ο οποίος εξαρτάται από 2 μεταβλητές: την ιδιοτιμή λ_j κ' έναν αριθμό $n_i = 1, \dots, k$. Επίσης, το άθροισμα $(n_1,j) + (n_2,j) + \dots + (n_k,j) =$ πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j. Με $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ συμβολίζω τις διακεκριμένες ιδιοτιμές του A.

πχ: οι μορφές Jordan για $n=3$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

πχ: Μορφές Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ & & & 2 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 2 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & 2 & & & \\ & & & & & & 2 & 1 \\ 0 & & & & & & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & & & & \\ & & & 7 & 1 & & \\ & & & 0 & 7 & & \\ & 0 & & & & 7 & 1 \\ & & & & & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

όχι για εξετάσεις

πχ Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan του πίνακα:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&1&0&0\\-1&2-\lambda&1&0\\1&0&1-\lambda&0\\0&0&0&3-\lambda\end{pmatrix}=(3-\lambda)\det\begin{pmatrix}3-\lambda&1&0\\-1&2-\lambda&1\\1&0&1-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda-3)(\lambda-2)\det\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2-\lambda&1\\1&0&1-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3-\lambda&1\\0&-1&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(\lambda-2)\det\begin{pmatrix}3-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)[(3-\lambda)(1-\lambda)+1]=$$

$$=(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-2)^2=(\lambda-3)(\lambda-2)^3$$

Άρα $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ και $\lambda_4=3$

$V(3)=\langle(0,0,0,1)\rangle$

$V(2)$: $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\x=z\\w=0\end{cases}\rightarrow\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

$V(2)=\langle(1,-1,1,0)\rangle$ Δεν διαγωνοποιείται

Ο πίνακας B που ζητάω έχει πρώτη στήλη $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ και τελευταία $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. Βρίσκω τις 2η και 3η

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\1-x\\x-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-x\\x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώ το $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ Η 2η στήλη του B είναι: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

No. Date

Επαναλαμβάνω:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1-x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ άρα } B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$